Cinématique du solide

1 Cinématique dans l'espace

1.1 Dérivation dans 2 repères

$$\left[\frac{d\overrightarrow{V}}{dt}\right]_{R'} = \left[\frac{d\overrightarrow{V}}{dt}\right]_{R} + \overrightarrow{\Omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{V}$$

1.2 Torseur cinématique

1.2.1 Expression générale

$$\{\mathcal{V}_{S/R,A}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega}_{S/R} \\ \overrightarrow{V}_{A,S/R} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Résultante} \\ \text{Moment} \end{array}$$

1.2.2 Cas particuliers

Torseur couple

$$\{\mathcal{V}_{S/R,A}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{V}_{A,S/R} \end{array} \right\}$$

Torseur à résultante (glisseur)

$$\{\mathcal{V}_{S/R,A}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega}_{S/R} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}$$

1.3 Loi de composition du vecteur vitesse

$$\overrightarrow{V}_{A,S/R} = \overrightarrow{V}_{B,S/R} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{\Omega}_{S/R}$$

1.4 Loi de composition du vecteur accélération

$$\overrightarrow{A}_{M,S/R_1} = \overrightarrow{A}_{M,S/R_2} + 2\overrightarrow{\Omega}_{R_2/R_1} \wedge \overrightarrow{V}_{M,S/R_2} + \left(\frac{d\overrightarrow{\Omega}_{R_2/R_1}}{dt}\right) \wedge \overrightarrow{O_2M} + \overrightarrow{\Omega}_{R_2/R_1} \wedge (\overrightarrow{\Omega}_{R_2/R_1} \wedge \overrightarrow{O_2M}) + \overrightarrow{A}_{O_2,R_2/R_1}$$

1.5 Équiprojectivité

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{V}_{A,S/R} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{V}_{B,S/R}$$

1.6 Somme de 2 torseurs

$$\{\mathcal{V}_{S/R_1,A}\} = \{\mathcal{V}_{S/R_2,A}\} + \{\mathcal{V}_{R_2/R_1,A}\}$$

1.7 Invariant scalaire

$I = \overrightarrow{\Omega}_{S/R}.\overrightarrow{V}_{A,S/R}$ ne dépend pas du point d'application.

1.8 Axe central

1.8.1 Définition

$\{I \in E; \quad \overrightarrow{\Omega}_{S/R} \wedge \overrightarrow{V}_{I,S/R} = \overrightarrow{0}\}$

1.8.2 Détermination analytique

$$\overrightarrow{AI} = \frac{\overrightarrow{\Omega}_{S/R} \wedge \overrightarrow{V}_{A,S/R}}{\overrightarrow{\Omega}^2_{S/R}} + \lambda \overrightarrow{\Omega}_{S/R}$$

2 Mouvement plan

2.1 Définition

$$\{\mathcal{V}_{S/R,A}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega}_{S/R} \\ \overrightarrow{V}_{A,S/R} \end{array} \right\}$$

Si $\overrightarrow{\Omega}_{S/R} \perp (\pi)$ un plan fixe et $\overrightarrow{A}_{A,S/R} \in \pi$ alors le mouvement de S/R est plan.

2.2 Centre Instantané de Rotation (C.I.R)

C'est le point I tel que $\overrightarrow{V}_{I,S/R} = \overrightarrow{0}$

$$0 \in (\pi \cap S) \Rightarrow \quad \overrightarrow{OI} = \frac{\overrightarrow{\Omega}_{S/R} \wedge \overrightarrow{V}_{O,S/R}}{\overrightarrow{\Omega}^2_{S/R}}$$

2.3 Théorème des 3 plans mobiles

Si 3 solides S_1, S_2 et S_3 ont un mouvement plan les uns par rapport aux autres alors les 3 CIR I_{12}, I_{23} et I_{13} sont alignés, et :

$$\frac{\overline{I_{ik}I_{kj}}}{\omega_{ij}} = \frac{\overline{I_{ji}I_{ik}}}{\omega_{jk}} = \frac{\overline{I_{kj}I_{ji}}}{\omega_{ki}}$$

2.4 Base et Roulante

Base Lieu de I dans le repère fixe R.

Roulante Lieu de I dans le repèdre mobile S.

La base et la roulante sont 2 courbes qui roulent sans glisser l'une sur l'autre.

Détermination algébrique

$$\text{Roulante : } \quad O_S \in S, \quad \overrightarrow{O_S I} = \frac{\overrightarrow{\Omega}_{S/R} \wedge \overrightarrow{V}_{O_s,S/R}}{\overrightarrow{\Omega}^2_{S/R}}$$

$\Rightarrow$ Équation paramétrée en fonction de Θ avec $\overrightarrow{\Omega}_{S/R} = \dot{\Theta}\overrightarrow{z}$

$$\text{Base : } \quad O_R \in R, \quad \overrightarrow{O_R I} = \overrightarrow{O_R O_S} + \overrightarrow{O_S I} = \overrightarrow{O_R O_S} + \frac{\overrightarrow{\Omega}_{S/R} \wedge \overrightarrow{V}_{O_s,S/R}}{\overrightarrow{\Omega}^2_{S/R}}$$

$\Rightarrow$ Équation paramétrée de I.

3 Solides en contact

Soient 2 solides S_1 et S_2 en contact ponctuel en P, (π) le plan tangent à S_1 et S_2 en P.

$$\{\mathcal{V}_{S_1/S_2,P}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega}_{S_1/S_2} \\ \overrightarrow{V}_{P,S_1/S_2} \end{array} \right\}$$

avec $\overrightarrow{V}_{P,S_1/S_2} = \overrightarrow{V}_{P,S_1/R} - \overrightarrow{V}_{P,S_2/R} \in (\pi)$

4 Roulement sans glissement

Si $\overrightarrow{V}_{S_1/S_2} = \overrightarrow{0}$, on dit que S_1 roule sans glisser sur S_2 en P.

Soit $\overrightarrow{n}$ la normale à (π)
On définit les vecteurs de rotation de roulement $\overrightarrow{\Omega}_{r,S_2/S_1}$ et de pivotement $\overrightarrow{\Omega}_{p,S_2/S_1}$:

- $\overrightarrow{\Omega}_{p,S_2/S_1} + \overrightarrow{\Omega}_{r,S_2/S_1} = \overrightarrow{\Omega}_{S_2/S_1}$
- $\overrightarrow{\Omega}_{p,S_2/S_1} = (\overrightarrow{\Omega}_{S_2/S_1} . \overrightarrow{n})\overrightarrow{n}$
- $\overrightarrow{\Omega}_{r,S_2/S_1} = \overrightarrow{n} \wedge (\overrightarrow{\Omega}_{S_2/S_1} \wedge \overrightarrow{n})$

Si 2 solides roulent sans glisser suivant une zone de contact (Z)
$\forall I \in (Z) \qquad \overrightarrow{V}_{I,S_2/S_1} = \overrightarrow{0} \Rightarrow$ la zone de contact est une droite.