Diffraction de la lumière

Lorsque la lumière (ou tout autre type d'onde) rencontre un obstacle dont la taille est de l'ordre de la longueur d'onde, on observe un phénomène appelé diffraction. L'optique géométrique ne permettant pas de décrire ce phénomène, il faut faire appel à l'optique ondulatoire.

1 Principe d'Huygens-Fresnel

1.1 Énoncé

Chaque point P de l'ouverture diffractane reçevant l'onde incidente se comporte comme une source secondaire et émet une onde sphérique de centre P. Cette onde a même fréquence que l'onde incidente, elle est en quadrature (déphasage de $\frac{\pi}{2}$) avec elle, son amplitude est proportionelle à l'élément de surface autour de P $dS(P)$. Les ondes sphériques réemises vont ensuite interférer.

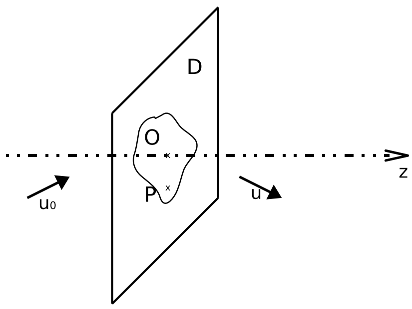
$$A(M) = \iint_D dA_p(M) = \iint_D aA_i(P)dS(P)e^{-jk(PM)}$$

- $a \in i\mathbb{R}$ (traduit la quadrature)
- $A_i(P)$: Amplitude incidente en P.
- $dS(P)$ élement de surface
- $e^{-jk(PM)}$: propagation de P vers M

1.2 Conditions d'étude

On se limite au cas où :
- l'onde incidente est plane,
- l'ouverture diffractante est plane,
- on observe le phénomène à l'infini.

Ces trois conditions sont appelées conditions de Fraunhofer.



Onde incidente plane de direction $\overrightarrow{u_0}$, observation en M à l'infini : observation suivant la direction $\overrightarrow{u}$.

Dans les conditions de Fraunhofer :

$$1^{\text{ère}} \text{ formule : } \qquad \mathcal{A}(\overrightarrow{u}) = \mathcal{A}_1 \iint_D e^{jk(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{u_0}).\overrightarrow{OP}} dS(P)$$

$$2^{\text{ème}} \text{ formule : } \qquad \mathcal{A}(\overrightarrow{k}) = \mathcal{A}_1 \iint_D e^{j(\overrightarrow{k}-\overrightarrow{k_0}).\overrightarrow{OP}} dS(P)$$

$$\text{avec } \overrightarrow{k} = k\overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{k_0} = k\overrightarrow{u_0}$$

$$3^{\text{ème}} \text{ formule : } \qquad \mathcal{A}(\alpha, \beta) = \mathcal{A}_1 \iint_D e^{\frac{2j\pi}{\lambda}[(\alpha-\alpha_0)x+(\beta-\beta_0)y]} dxdy$$

$$\text{avec} \quad \overrightarrow{u} = (\alpha, \beta, \gamma) \quad \overrightarrow{u_0} = (\alpha_0, \beta_0, \gamma_0) \quad P(x, y, 0) \Rightarrow dS(P) = dxdy$$

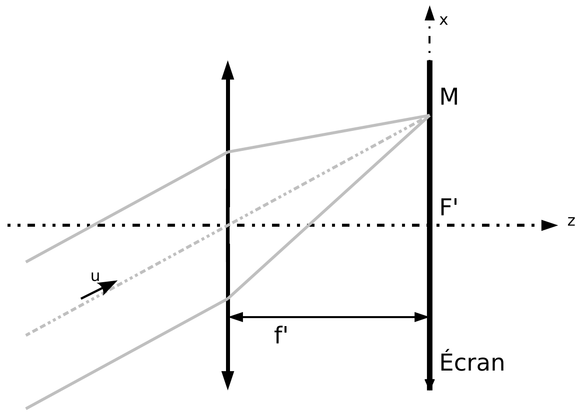
Si l'ouverture n'est pas transparente :

$$\mathcal{A}_i(P) = \mathcal{A}_i(P') \cdot \tau(P') \qquad \text{(On filtre l'amplitude avant la pupille diffractante)}$$

$$\mathcal{A}(\overrightarrow{u}) = \mathcal{A}_1 \iint_D e^{jk(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{u_0}).\overrightarrow{OP}}\tau(P)dS(P) \text{Avec } \tau(P) \text{ le coefficient de transmission du filtre} \quad \tau \in [0,1]$$

On peut aussi ajouter $\tau(x, y)$ dans l'intégrale à la $3^{\text{ème}}$ formule.

Observation dans le plan focal image d'une lentille convergente :

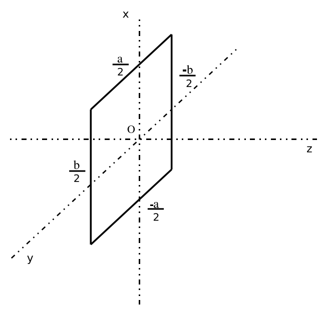


$\overrightarrow{u} = (\alpha, \beta, \gamma) \quad \alpha = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{u_x} \quad \beta = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{u_y} \quad \alpha \approx \dfrac{X}{f'} \quad \beta \approx \dfrac{Y}{f'}$ au voisinage du foyer.

$$\mathcal{A}(X,Y) = \mathcal{A}_1 \iint_D \tau(x,y) e^{\frac{2j\pi}{\lambda}[(\frac{X}{f'}-\alpha_0)x+(\frac{Y}{f'}-\beta_0)y]}dxdy$$

2 Diffraction à l'infini par une ouverture plane

2.1 Diffraction par une ouverture rectangulaire :



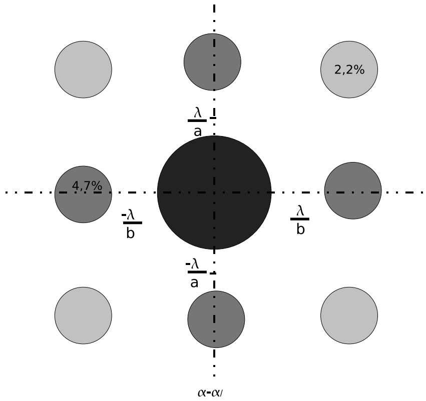
$$\mathcal{A}(\alpha,\beta) = \mathcal{A}_1 \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} e^{\frac{2j\pi}{\lambda}[(\alpha-\alpha_0)x+(\beta-\beta_0)y]}dxdy = \mathcal{A}_1 \cdot ab \cdot \text{sinc}\left(\frac{\pi(\alpha-\alpha_0)a}{\lambda}\right)\text{sinc}\left(\frac{\pi(\beta-\beta_0)b}{\lambda}\right) \quad \text{avec sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

Amplitude maximale pour $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$ $\qquad \Rightarrow$ On est à l'image géométrique de la source.

$$I_0 = |\mathcal{A}_1|^2 \cdot a^2b^2 \qquad I(\alpha,\beta) = \mathcal{A}(\alpha,\beta)\cdot\mathcal{A}^*(\alpha,\beta) = I_0\text{sinc}^2\left(\frac{\pi a(\alpha-\alpha_0)}{\lambda}\right)\text{sinc}^2\left(\frac{\pi b(\beta-\beta_0)}{\lambda}\right)$$

Propriétés de la fonction $\text{sinc}^2(x)$:
- Le pic central a pour largeur 2π
- Le pic secondaire a pour largeur π
- Largeur du pic central à mi-hauteur : $\approx \pi$
- pics secondaires à $\approx \left(\dfrac{2n+1}{2}\right)\pi$

Figure de diffraction :



Taille de la tache principale : $\Delta X = \dfrac{2\lambda f'}{a}$ et $\Delta Y = \dfrac{2\lambda f'}{b}$
Taille des taches secondaires $\Delta X = \dfrac{\lambda f'}{a}$ et $\Delta Y = \dfrac{\lambda f'}{b}$
La taille de la tache principale est inversement proportionelle à la taille de l'ouveture.

2.2 Diffraction par une fente fine (verticale)

Figure identique, écrasée selon la verticale, image horizontale de direction perpendiculaire à la fente.
$I(\alpha,\beta) = 0$ si $\alpha \neq \alpha_0$
$I(\alpha,\beta) = I_1 \text{sinc}\left(\dfrac{\pi b(\beta-\beta_0)}{\lambda}\right)$ si $\alpha = \alpha_0$

2.3 Diffraction par une pupille circulaire

La pupille est un disque de rayon R. La figure de diffraction dans les conditions de FRAUNHOFER est composés d'anneaux concentriques. La démonstration n'est pas au programme.

La tache centrale (tache d'Airy) concentre 80% de l'énergie lumineuse totale de la figure. Elle a pour rayon $\dfrac{0,61\lambda f'}{R}$ dans le plan focal d'une lentille convergente.

2.4 Théorème de Babinet

Les figures de diffraction dues à 2 pupilles conplémentaires sont identiques sauf au niveau de l'image géométrique de la source. Complémentarité : $\tau_1(x,y) = 1 - \tau_2(x,y)$

2.5 Application de la diffraction à la résolution des instruments d'optique

La taille caractéristique de la tache centrale de diffraction est inversement proportionelle à la taille de l'ouveture. L'image d'un point est une tache, et 2 points proches peuvent avoir leurs images confondues, la diffraction est le principal facteur de limitation de résolution pour les instruments d'optique.

2.6 La diffraction dans les fentes d'Young

$$I(M) = I_0 \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi a y}{\lambda D}\right)\right)$$

$I_0 =$ Intensité due à S_1 seule, en fonction de M :

$$I_0(M) = I_1 \mathrm{sinc}^2\left(\frac{\pi b(\alpha - \alpha_0)}{\lambda}\right) \qquad \alpha_0 = 0 \qquad \text{(incidence normale)}$$

$$I(u) = 2I_1 \mathrm{sinc}^2\left(\frac{\pi b u}{\lambda}\right) \cos^2\left(\frac{\pi a u}{\lambda}\right) \qquad \text{avec } (u = \sin(i))$$

On observe une modulation spatiale de la figure d'interférence.