# Lois générales de l'Électromagnétisme

## 1 Conservation de la charge

Équation de conservation de la charge :

$$\operatorname{div}\overrightarrow{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \qquad \text{avec} \quad \begin{array}{l} \overrightarrow{j} = \sum_i \rho_{m_i} \overrightarrow{v_i}, \quad \overrightarrow{v_i} = \text{vitesse de conduction} \\ \rho = \dfrac{dq}{d\tau} \text{ densité volumique de charge} \end{array}$$

## 2 Équations de Maxwell

### 2.1 Courant de déplacement

C'est le vecteur $\overrightarrow{j_D}$ donné par :

$$\overrightarrow{j_D} = \varepsilon_0 \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}$$

### 2.2 Forme locale des équations de Maxwell

Maxwell-Gauss : $\operatorname{div}\overrightarrow{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ Maxwell-Thomson : $\operatorname{div}\overrightarrow{B} = 0$

Maxwell-Farraday : $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\overrightarrow{E} = -\dfrac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}$ Maxwell-Ampère : $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\overrightarrow{B} = \mu_0 \overrightarrow{j} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}$ avec $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$

### 2.3 Conséquences

$\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$ sont créés par des charges et des courants.

$\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$ sont couplés : $\overrightarrow{B}$ variable dans le temps crée $\overrightarrow{E}$ (induction), $\overrightarrow{E}$ variable dans le temps crée $\overrightarrow{B}$ (propagation d'ondes électromagnétique).

### 2.4 Forme intégrale des équations de Maxwell

#### 2.4.1 Équation de Maxwell-Thomson (Conservation du flux)

$$\operatorname{div}\overrightarrow{B} = 0$$

Le flux $\iint_S \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{dS}$ est conservé le long d'un tube de champ.

#### 2.4.2 Théorème de Gauss

$S$ une surface fermée orientée vers l'extérieur :

$$\oiint_S \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dS} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

#### 2.4.3 Loi de Farraday

$\mathcal{C}$ un circuit fermé fixe (induction de Neuman) :

$$\oint_{\mathcal{C}} \overrightarrow{E} . \overrightarrow{dl} = e = -\frac{d\phi}{dt}$$

On retrouve le cas de la statique : $\overrightarrow{B}$ est constant donc $\oint_{\mathcal{C}} \overrightarrow{E} . \overrightarrow{dS} = 0$, $\overrightarrow{E}$ est à circulation conservative.

#### 2.4.4 Théorème d'Ampère (forme générale)

$\mathcal{C}$ un circuit fermé

$$\oint_{\mathcal{C}} \overrightarrow{B}.\overrightarrow{dl} = \mu_0 i_{\text{enl}} + \mu_0 \iint_S \overrightarrow{j_D}.\overrightarrow{dS}$$

### 2.5 ARQS

On se situe dans l'Approximation des Régimes Quasi-Stationnaires si :

$$\|\overrightarrow{j_D}\| \ll \|\overrightarrow{j}\| \quad \text{ou} \quad \|\frac{1}{c^2}\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}\| \ll \mu_0 \|\overrightarrow{j}\|$$

Si on apelle $T$ l'échelle temporelle de variationde $\overrightarrow{E}$, et $E$ l'ordre de grandeur de $\overrightarrow{E}$, la condition d'ARQS est : $T \gg \dfrac{\varepsilon_0 E}{j}$

### 2.6 Équations de Maxwell dans l'ARQS

$$\begin{array}{ll} \text{div}\overrightarrow{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} & \text{div}\overrightarrow{B} = 0 \\ \overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{E} = -\dfrac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} & \overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{B} = \mu_0 \overrightarrow{j} \end{array}$$

### 2.7 Équations de Maxwell en statique

$$\begin{array}{ll} \text{div}\overrightarrow{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} & \text{div}\overrightarrow{B} = 0 \\ \overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{E} = \overrightarrow{0} & \overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{B} = \mu_0 \overrightarrow{j} \end{array}$$

On remarque que $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$ sont découplés.

### 2.8 Relations de passage à une interface

On considère une interface entre deux milieux constituant une distribution de charge ($\sigma$) et de courant ($\overrightarrow{j_S}$). Soient $M_1$ et $M_2$ deux points infiniment proches de la surface se faisant face, chacun placés d'un côté de l'interface. $\overrightarrow{n_{12}}$ un vecteur unitaire dirigé de 1 vers 2. On a :

$$\overrightarrow{E_2} - \overrightarrow{E_1} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\overrightarrow{n_{12}} \qquad \overrightarrow{B_2} - \overrightarrow{B_1} = \mu_0 \overrightarrow{j_S} \wedge \overrightarrow{n_{12}} \quad \text{avec } \sigma = \int_{M_1}^{M_2} \rho(z)dz$$

- Le champ électrique normal et le champ magnétique tangentiel sont discontinus.
- Le champ électrique tangentiel et le champ magnétique normal sont continus.

## 3 Potentiels

### 3.1 Potentiel vecteur

On a toujours $\text{div}\overrightarrow{B} = 0$, il existe donc $\overrightarrow{A}$ tel que $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{A}$. $\overrightarrow{A}$ s'apelle le potentiel vecteur.

### 3.2 Potentiel scalaire

$\overrightarrow{E} + \dfrac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t}$ dérive d'un potentiel scalaire $V$ tel que :

$$\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V - \frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t}$$

Remarque : les deux expressions définissent $\overrightarrow{A}$ et $V$, et sont complètement équivalentes aux équations de Maxwell-Farraday et de Maxwell-Thomson.

### 3.3 Non-unicité

$\overrightarrow{A}$ n'est pas unique. Pour tout champ scalaire $\varphi$, $\overrightarrow{A'} = \overrightarrow{A} + \overrightarrow{\text{grad}}\varphi$, $\overrightarrow{A'}$ est aussi un potentiel vecteur qui convient. De plus, $V' = V - \dfrac{\partial \varphi}{\partial t}$ est un potentiel scalaire qui convient aussi. On aura ainsi :

$$\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V' - \frac{\partial \overrightarrow{A'}}{\partial t}$$

On peut définir une jauge : c'est une relation entre $\overrightarrow{A}$ et $V$ restreignant le choix possible.

### 3.4 Equations de Poisson

En électrostatique : $\Delta V = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$

En magnétostatique (vrai aussi en ARQS) : $\Delta \overrightarrow{A} = -\mu_0 \overrightarrow{j}$

## 4 Énergie électromagnétique

### 4.1 Densité d'énergie

$$u = \frac{d\mathcal{E}}{d\tau} = \varepsilon_0 \frac{E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$$

### 4.2 Puissance cédée aux porteurs de charges

$\mathcal{V}$ un volume de l'espace contenant des charges éventuellement mobiles, et dans lequel règne un champ électromagnétique $(\overrightarrow{E}, \overrightarrow{B})$. La puissance volumique cédée aux porteurs de charges par le champ électromagnétique est :

$$\frac{d\mathcal{P}}{d\tau} = \overrightarrow{j} \,.\, \overrightarrow{E}$$

**Cas d'un conducteur ohmique :** $\dfrac{d\mathcal{P}}{d\tau} = \overrightarrow{j} \,.\, \overrightarrow{E}$, avec $\overrightarrow{j} = \gamma \overrightarrow{E}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{d\mathcal{P}}{d\tau} = \gamma E^2$ et $\mathcal{P} = Ri^2$ avec $R = \dfrac{\rho l}{S}$, $i = jS$.

Puissance joule volumique : $\dfrac{d\mathcal{P}_I}{d\tau} = \gamma E^2 = \dfrac{j^2}{\gamma}$

### 4.3 Vecteur de Poynting

C'est un vecteur $\overrightarrow{\pi} = \overrightarrow{\pi}(M,t)$ tel que $\overrightarrow{\pi} \cdot \overrightarrow{dS}$ = puissance électromagnétique traversant la surface $\overrightarrow{dS}$, $\forall\, \overrightarrow{dS}$ centré en $M$.

### 4.4 Bilan d'énergie

$u$ l'énergie du système à $t$ :

$$\underbrace{div\,\overrightarrow{\pi}}_{\text{terme de flux}} + \frac{\partial u}{\partial t} = \underbrace{-\overrightarrow{j} \,.\, \overrightarrow{E}}_{\text{terme de création}}$$

### 4.5 Expression de $\overrightarrow{\pi}$

Une expression possible pour $\overrightarrow{\pi}$ est :

$$\overrightarrow{\pi} = \frac{\overrightarrow{E} \wedge \overrightarrow{B}}{\mu_0}$$

# 5 Effet de peau

## 5.1 Présentation du phénomène

Soit un conducteur ohmique de conductivité $\gamma$ placé dans le demi-espace $z \geq 0$, entouré de vide. On crée un champ électrique tel que : $\overrightarrow{E}(z=0) = E_0 e^{j\omega t}\overrightarrow{u_y}$. Le calcul de $\overrightarrow{E}$ dans le conducteur à partir des équations de Maxwell donne :

$$\overrightarrow{E} = E_0 e^{j(\omega t - \frac{z}{\delta})} e^{-\frac{z}{\delta}} \overrightarrow{u_y} \text{ avec } \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$$

Le champ n'a de valeur notable que sur une épaisseur $\delta$ (épaisseur de peau) de la surface du conducteur.

## 5.2 Cas d'un conducteur parfait

C'est un conducteur tel que $\gamma \to 0 \;\Rightarrow\; \delta \to 0$ donc le champ électrique est nul partout dans le conducteur. Le champ magnétique est nul dans les conducteur dont la taille vérifie $L \gg \delta$. Ici, $\delta \to 0$, il existe donc des charges et des courants surfaciques.