

ÉLECTROSTATIQUE

1 Le champ et les charges

1.1 Expression du champ $\vec{E}$ créé en un point M de l'espace

Distribution discrète : $\vec{E}(M) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_{P_i M}^2} \vec{u}_{P_i M}$

Distribution linéique : $\vec{E}(M) = \int_{P \in \Gamma} \frac{\lambda \cdot dl}{4\pi\epsilon_0 r_{PM}^2} \vec{u}_{PM} \quad \lambda = \frac{dq}{dl}$ Densité linéique de charge

Distribution surfacique : $\vec{E}(M) = \iint_{P \in S} \frac{\sigma \cdot dS}{4\pi\epsilon_0 r_{PM}^2} \vec{u}_{PM} \quad \sigma = \frac{dq}{ds}$ Densité surfacique de charge

Distribution volumique : $\vec{E}(M) = \iiint_{P \in V} \frac{\rho \cdot d\tau}{4\pi\epsilon_0 r_{PM}^2} \vec{u}_{PM} \quad \rho = \frac{dq}{d\tau}$ Densité volumique de charge

1.2 Invariances

Si la distribution de charges est invariante par translation suivant un axe, alors le champ créé est invariant par translation suivant le même axe.

Si la distribution de charges est invariante par rotation autour d'un axe, alors le champ créé est invariant par rotation autour du même axe.

1.3 Symétries

Soit (π) un plan de symétrie pour la distribution de charge. On a : $\vec{E}(\mathcal{S}(M)_\pi) = \mathcal{S}(\vec{E}(M))_\pi$

Soit (π') un plan d'antisymétrie pour la distribution de charge. On a : $\vec{E}(\mathcal{S}(M)_{\pi'}) = -\mathcal{S}(\vec{E}(M))_{\pi'}$

1.4 Potentiel électrostatique

C'est le champ scalaire V tel que : $\forall A, B \quad \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = V(A) - V(B)$

Relation entre $\vec{E}$ et V : $\vec{E} = -\text{grad } V$

Expresion du potentiel :

Distribution discrète : $V(M) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_{P_i M}} + C^{\text{te}}$

Distribution linéique : $V(M) = \int_{P \in \Gamma} \frac{\lambda \cdot dl}{4\pi\epsilon_0 r_{PM}} + C^{\text{te}}$

Distribution surfacique : $V(M) = \iint_{P \in S} \frac{\sigma \cdot dS}{4\pi\epsilon_0 r_{PM}} + C^{\text{te}}$

Distribution volumique : $V(M) = \iiint_{P \in V} \frac{\rho \cdot d\tau}{4\pi\epsilon_0 r_{PM}} + C^{\text{te}}$

1.5 Ligne de champ

Soit $\vec{C}$ un champ de vecteurs.

Une ligne de champ est une courbe tangente à $\vec{C}$ en tout point.

1.6 Équipotentielle

C'est une surface sur laquelle V est constant.

Les lignes de champ électrostatique sont orthogonales aux équipotentielles.

1.7 Énergie potentielle électrostatique

Une particule de charge q dans un champ V possède une énergie potentielle : $E_{pe} = qV$
 On a : $\vec{F}_{el} = -\text{grad } qV$

1.8 Théorème de Gauss

Soit S une surface fermée orientée vers l'extérieur. On a :

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}_{\text{ext}} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

1.9 Formule de Green-Ostrogradski

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \text{div } \vec{E} \cdot d\tau$$

1.10 Équation de Maxwell-Gauss

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

1.11 Equation de Poisson

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \text{avec} \quad \Delta V = \text{div}(\text{grad } V)$$

2 Conducteurs en équilibre électrostatique

Propriété : Soit A un conducteur électrostatique en équilibre : On a $\vec{E}_{\text{int}} = \vec{0}$ et $V_{\text{int}} = C^{\text{te}}$ et aussi $\rho_{\text{int}} = 0$
 Les charges sont réparties uniquement sur la surface du conducteur.

2.1 Théorème de Coulomb

Au voisinage de la surface d'un conducteur, dans le vide :

$$\vec{E}(M)_{\text{surf}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{n} \quad \vec{n} \text{ vecteur unitaire normal au conducteur, dirigé vers l'extérieur de celui-ci.}$$

2.2 Pression électrostatique

Les charges de surface d'un conducteur sont soumises à une force électrostatique appelée pression électrostatique. Cette force est normale à la surface, proportionnelle à celle-ci et dirigée de l'intérieur vers l'extérieur du conducteur.

3 Condensateur

3.1 Théorème de éléments correspondants

Soient A et B deux conducteurs s'influant l'un et l'autre, un tube de champ reliant A et B , S_A et S_B les surfaces du tube de champ sur A et B , de charges respectives q_A et q_B . On a : $q_A + q_B = 0$

3.2 Définition

C'est un système de 2 conducteurs en influence totale.
 On appelle *charge* du condensateur la charge de l'une des deux armatures.

3.3 Capacité d'un condensateur

$$C = \frac{Q_1}{V_1 - V_2} = \frac{\varepsilon_0 \iint_{(1)} \vec{E} \cdot d\vec{S}}{\int_{(1)}^{(2)} \vec{E} \cdot d\vec{l}} > 0$$

3.4 Cas des diélectriques

Pour les calculs dans un diélectrique, on remplace ε_0 par $\varepsilon_0 \varepsilon_r$ où ε_r est appelé permittivité diélectrique relative ($\varepsilon_r > 1$, sans dimension). Attention, ρ , σ et λ peuvent différer en fonction du diélectrique.

3.5 Associations de condensateurs

En série : $\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \sum_i \frac{1}{C_i}$

En parallèle : $C_{\text{eq}} = \sum_i C_i$

3.6 Densité volumique d'énergie

Partout où règne un champ électrostatique, on lui associe une densité volumique d'énergie : $u_{\text{el}} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$

Énergie totale :

$$\mathcal{E}_{\text{tot}} = \iiint_{\text{espace}} u_{\text{el}} d\tau = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \mathcal{V} \quad \text{si } \vec{E} \text{ uniforme.}$$