Mouvements à force centrale

1 Force centrale

1.1 Définition

Un mouvement à force centrale est le mouvement d'un point soumis à une force $\overrightarrow{F}$ dont le support passe toujours par un point O (centre de force) fixe dans un référentiel galiléen.

Force centrale isotrope : $\overrightarrow{F} = f(r)\overrightarrow{u_r}$

Une force centrale isotrope dérive d'une énergie potentielle Ep. Ep est une primitive de $-f$.

1.2 Loi des aires

1.2.1 Conservation du moment cinétique

$$\frac{d\overrightarrow{\sigma_0}}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \overrightarrow{\sigma_0} = C^{\text{te}}$$

Or $\overrightarrow{\sigma_0} = \overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{v} = \overrightarrow{r} \wedge m\overrightarrow{v}$. On pose $\overrightarrow{C} = \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{v}$ (vecteur constant).

$$\overrightarrow{\sigma_O} = m\overrightarrow{C}$$

1.2.2 Conséquence

* Si $\overrightarrow{\sigma_0} = \overrightarrow{0}$ donc la trajectoire est une droite passant par O.

* Si $\overrightarrow{\sigma_0} \neq \overrightarrow{0}$: on choisit $\overrightarrow{u_z}$ tel que $\overrightarrow{\sigma_0} = \sigma\overrightarrow{u_z}$ $(\sigma > 0)$.

Donc $\overrightarrow{C} = C\overrightarrow{u_z} = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{v} = C^{te}$ donc $\overrightarrow{OM} \perp \overrightarrow{C}$, le mouvement est plan.

En coordonnées polaires, $\overrightarrow{C} = r^2\dot{\theta}\overrightarrow{u_z}$ donc $r^2\dot{\theta} = C^{te}$

Loi des aires :

Vitesse aréolaire : $v_a = \dfrac{dS}{dt}$ où dS est la surface balayée par $\overrightarrow{OM}$ pendant dt. $dS = \dfrac{\|\overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{dr}\|}{2}$ $\quad v_a = \dfrac{C}{2}$

$$\text{Loi des aires :} v_a = \frac{C}{2} = \frac{r^2\dot{\theta}}{2} \qquad C = \text{ constante des aires}$$

1.3 Consevation de l'énergie mécanique

1.3.1

Pour un mouvement à force centrale isotrope, Em se conserve : $\dfrac{dEm}{dt} = \mathcal{P}_{\overrightarrow{F_{\text{nc}}}} = 0 \Rightarrow Em = C^{\text{te}}$. On a un problème à 2 paramètres : r et θ.

1.3.2 Potentiel efficace

$Em = Ec + Ep$

* $Ec = \dfrac{1}{2}mv^2 = \dfrac{1}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right)$

* $Ep = Ep(r)$ car c'est une primitive de $-f$.

On pose $Ep_{\text{eff}} = \dfrac{\sigma^2}{2mr^2} + Ep(r)$, donc $Em = \dfrac{1}{2}m\dot{r}^2 + Ep_{\text{eff}}$, ce qui nous ramène à un problème à 1 paramètre : on cherche r, puis on obtient $\dot{\theta}$ avec la constante des aires, puis θ en intégrant.

En traçant le graphe de Ep_{eff}, on trouve le domaine possible pour le mouvement suivant la valeur de Em

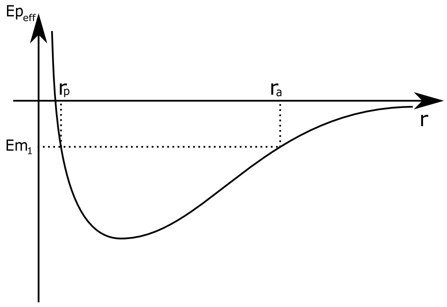
2 Champ de force newtonien

2.1 Définition

$\overrightarrow{F}$ est une force newtonienne si $\overrightarrow{F} = \frac{K}{r^2}\overrightarrow{u_r}$. C'est une force centrale qui dérive d'une énergie potentielle $Ep = \frac{K}{r}$

- Si $K > 0$, la force est attractive.
- Si $K < 0$, la force est répulsive.
- Si $K = 0$, la force n'est pas avec toi.

2.2 Nature de la trajectoire



$$\overrightarrow{F} = \frac{K}{r^2}\overrightarrow{u_r} \quad Em = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{\sigma^2}{2mr^2} + \frac{K}{r}}_{Ep_{\text{eff}}}$$

* Si $Em < 0$: état lié, $r_p < r < r_a$. La trajectoire est une ellipse dont l'un des foyers est le centre de force. Points remarquables :

P = point la plus proche de O, r_p = péricentre.
A = point le plus éloigné de O, r_a = apocentre.

$$v_p = v_{\min} \quad v_a = v_{\max} \quad Em = \frac{K}{2a} \text{ } (a = \text{demi grand axe}) \quad \text{et} \quad \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 m}{|K|}$$

* Si $Em = 0$: état de diffusion, la trajectoire est une parabole de foyer O.
* Si $Em > 0$: état de diffusion, la trajectoire est un arc d'hyperbole dont un des foyers est le centre de force.

2.3 Trajectoire circulaire

a le rayon de la trajectoire.

$$v = \sqrt{\frac{-K}{ma}} \qquad Em = \frac{K}{2a} \qquad T = \frac{2\pi a}{v}$$

2.4 Lois de Képler

- Les planètes décrivent des ellipses ont le centre du soleil est l'un des foyers.
- Le rayon vecteur pour une planète donnée balaie des aires égales en des durées égales.
- $\frac{T^2}{a^3}$ est indépendant de la planète considérée.

2.5 Vitesse de libération

C'est la vitesse minimale qu'il faut communiquer à un point matériel pour le libérer de l'attraction d'un corps. Sur terre, $v_{\text{lib}} = 11,2\text{km.s}^{-1}$