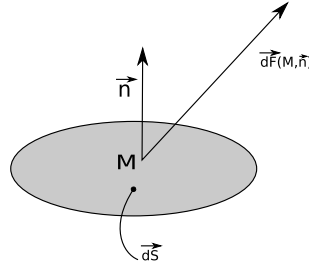


RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

MÉCANIQUE DES STRUCTURES

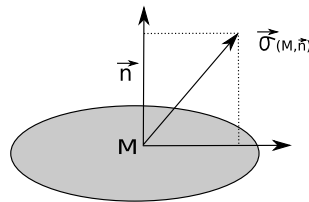
1 Le vecteur contrainte



On effectue une coupure plane d'un milieu. Sur tout élément de surface dS , la partie otée exerçait un effort $\vec{dF}(M, \vec{n})$. On définit la contrainte par :

$$\vec{\sigma}(M, \vec{n}) = \frac{\vec{dF}(M, \vec{n})}{dS} \quad \|\vec{\sigma}\| \text{ est homogène à une pression}$$

1.1 Projection de σ



$$\vec{\sigma}(M, \vec{n}) = \sigma_n \vec{n} + \vec{\tau}$$

avec : σ_n la contrainte normale et τ la contrainte de cisaillement.

1.2 Tenseur des contraintes

Si on définit un repère (x, y, z) direct de centre M. $\vec{\sigma}(M, \vec{n})$ peut alors se définir par son tenseur $\tilde{\sigma}$ avec : $\vec{\sigma}(M, \vec{n}) = \tilde{\sigma} \vec{n}$:

$$\tilde{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

$\tilde{\sigma}$ est symétrique.

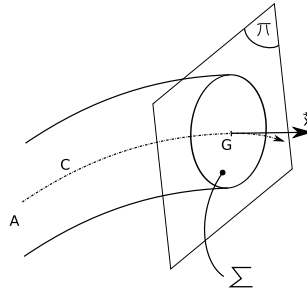
2 Critère de Tresca et de Von mises

Ces deux critères sont essentiellement utilisés en traction pure. On connaît le tenseur des contraintes :

$$\tilde{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec } \sigma_e \text{ la limite élastique du matériau}$$

Ces deux critères donnent des relations sur le vecteur contrainte pour que la limite élastique ne soit pas dépassée.

2.1 Définition de la poutre



Un milieu continu curviligne est généré par une aire plane Σ non nécessairement constante dont le centre de gravité G décrit la courbe caractéristique $\mathcal{C}$.

Autres conditions à réaliser :

- Le plan (π) contenant σ doit rester perpendiculaire à $\vec{x}$
- la longueur de l'arc AG doit être telle que $AG > 10$ fois la plus grande dimension de Σ
- le Rayon de courbure de $\mathcal{C}$ est tel que $R > 10$ fois la plus grande dimension de σ
- La variation des dimension de Σ est continue.

Autre remarque, on n'étudiera que les poutres dont la courbe $\mathcal{C}$ est droite.

3 Principes

3.1 Principe de St-Venant

« Les contraintes et les déformations d'une région de la poutre, éloignée des points d'application des charges, ne dépendent que du torseur des charges ».

Autrement dit : les principes de la RdM ne s'appliquent que loin de là où s'exercent les efforts extérieurs.

3.2 Principe de Navier-Bernoulli

Les sections droites et planes de la courbe non déformée restent droites et planes après déformation : toute section de poutre reste une section de poutre après déformation.

Autrement dit : on peut appliquer le principe de superposition pour les actions.

4 Petits déplacements

Un déplacement est la composée d'un translation et d'une rotation. Soit un déplacement du point $G \rightarrow G'$

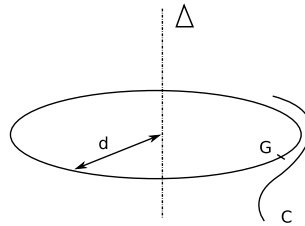
- $\vec{u}(G)$ = vecteur déplacement = $\overrightarrow{GG'}$
- $\vec{\theta}(G)$ = vecteur rotation du déplacement

Torseur des petits déplacements :

$$\{\mathcal{U}_G\} =_G \begin{Bmatrix} \vec{\theta}(G) \\ \vec{u}(G) \end{Bmatrix}$$

$$\{\mathcal{U}_M\} =_M \begin{Bmatrix} \vec{\theta}(M) = \vec{\theta}(G) \\ \vec{u}(M) = \vec{u}(G) + \overrightarrow{MG} \wedge \vec{\theta}(G) \end{Bmatrix}$$

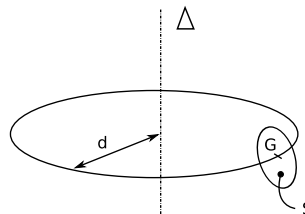
5 Théorèmes de Guldin



L'aire engendrée par la rotation d'une courbe plane $\mathcal{C}$ autour d'un axe Δ est :

$$S = \alpha \times d \times L \quad \text{avec :}$$

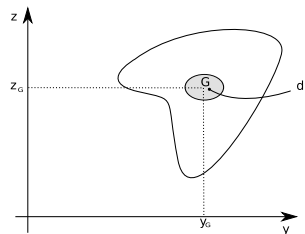
- α l'angle de rotation en radians
- L la longueur de $\mathcal{C}$



Le volume engendré par la rotation d'une surface plane S autour de Δ est :

$$V = S \times \alpha \times d$$

5.1 Moments statiques



$$A_{Oy} = \iint z \, dS = S z_G$$

$$A_{Oz} = \iint y \, dS = S y_G$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{S} (A_{Oz} \vec{y} + A_{Oy} \vec{z})$$

5.2 Moments quadratiques

$$I_{Oy} = \iint z^2 \, dS \quad I_{Oz} = \iint y^2 \, dS$$

5.3 Moment produit

$$I_{Oyz} = \iint yz \, dS$$

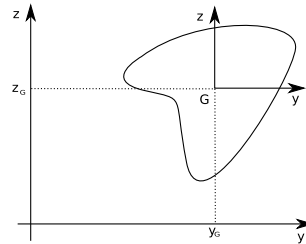
5.4 Moments quadratiques

$$I_O = \iint (z^2 + y^2) dS = \iint r^2 dS$$

$$I_O = I_{Oy} + I_{Oz}$$

5.5 Théorème de Huygens

Il permet de passer de l'écriture des moments quadratiques polaires en un point G à un point O .



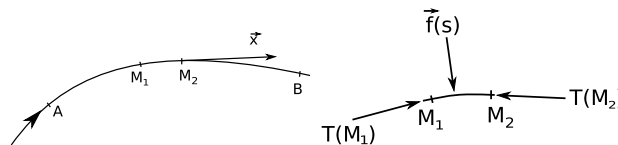
$$I_O = I_G + S(y_G^2 + z_G^2)$$

5.6 Axes principaux d'inertie d'une section S de centre de gravité G

Axes centraux : axes passant par G . Si un des deux axes $(\vec{Y}, \vec{Z})$ est axe de symétrie de la section (S) alors $I_{OYZ} = 0$ et on les nomme **axes principaux**. On dit alors que le repère $(G, \vec{Y}, \vec{Z})$ est un repère principal d'inertie.

6 Loi fondamentale des milieux curvilignes

Soit un milieu curviligne AB orienté de A vers B et deux points M_1 et M_2 .



On cherche à définir une loi donnant les efforts agissant sur le tronçon M_1, M_2 . M_1M_2 est soumis à une charge extérieur quelconque $\vec{f}$.

Torseur des efforts intérieurs auquel est soumis M_1M_2

$$\{\mathcal{T}_O\} = {}_O \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{(s)} \\ \vec{\mathcal{M}}_{O, (R_{(s)})} = \vec{\mathcal{M}}_{(O,s)} \end{array} \right.$$

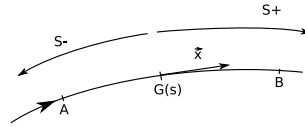
On montre que :

$$\frac{d\vec{R}_{(s)}}{ds} + \vec{f}(s) = \vec{0}$$

$$\frac{d\vec{\mathcal{M}}_{(O,s)}}{ds} + \vec{x} \wedge \vec{R}_{(s)} = \vec{0}$$

O est un point quelconque de l'espace, s est l'abscisse curviligne du point O . $\vec{x}$ est le vecteur unitaire tangent à la courbe en O .

7 Torseur des efforts intérieurs ou de cohésion



Une poutre AB étant en équilibre, on réalise une coupure orthogonale à la courbe caractéristique au point $G(s)$. Ayant défini une orientation, on appelle conventionnellement $S+$ la partie à droite de G , et $S-$ la partie à gauche.

La poutre étant en équilibre :

$$\mathcal{T}_{ext/AB} = \mathcal{T}_{ext/S-} + \mathcal{T}_{ext/S+} = 0$$

Pour que le tronçon $S-$ soit en équilibre, il convient d'appliquer en $G(s)$ un torseur $\mathcal{T}(s)$ appelé torseur des efforts intérieurs ou de cohésion qui représente les actions de $S+$ sur $S-$:

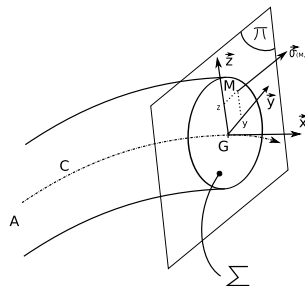
$$\mathcal{T}(s) = \mathcal{T}_{S+/S-}$$

L'équilibre du tronçon $S-$ se traduit par :

$$\mathcal{T}_{S+/S-} + \mathcal{T}_{ext/S-} = 0 \quad \text{donc :}$$

$$\begin{aligned} \{\mathcal{T}(s)\} &= \{\mathcal{T}_{ext/S+}\} \\ &= -\{\mathcal{T}_{ext/S-}\} \end{aligned}$$

8 Relation entre le tenseur des contraintes et le torseur des efforts intérieurs



En tout point M de la courbe s'exerce un glisseur élémentaire : $d\vec{F} = \overline{\sigma(M)}dS$ donc :

$$\overline{R(s)} = \int_{M \in \Sigma} \overline{\sigma(M)}dS \quad \text{et} \quad \overline{\mathcal{M}(s)} = \int_{M \in \Sigma} \overline{G(s)M} \wedge \overline{R(s)}dS$$

D'où :

$$\begin{aligned} N(s) &= \int \sigma_{11} dS & M_t(s) &= \int (y \sigma_{13} - z \sigma_{12}) dS \\ T_y(s) &= \int \sigma_{12} dS & M_{fy}(s) &= \int z \sigma_{11} dS \\ T_z(s) &= \int \sigma_{13} dS & M_{fz}(s) &= - \int y \sigma_{11} dS \end{aligned}$$

Remarque : $\overline{GM} \wedge \vec{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \end{pmatrix} = (\sigma_{13}y - \sigma_{12}z) \vec{x} + \sigma_{11}z \vec{y} + \sigma_{11}y \vec{z}$

Les axes $(G(s), \vec{y})$ et $(G(s), \vec{z})$ sont des axes centraux et principaux d'inertie pour la section droite Σ .

9 Sollicitations simples

9.1 Traction pure - compression pure

9.1.1 Définition

Une poutre est soumise à de la traction pure si en tout point $G(s)$ de la courbe caractéristique, le torseur des efforts intérieurs s'écrit :

$$\{\mathcal{T}(s)\} = \begin{cases} \overrightarrow{R_{(s)}} = N(s) \vec{x} \\ \overrightarrow{M_{(s)}} = \vec{0} \end{cases}$$

9.1.2 Relation déplacement-déformation

Le torseur de petits déplacements s'écrit alors : $\{\mathcal{U}_G\} = \begin{cases} \vec{0} \\ \overrightarrow{u(G)} = u \vec{x} \end{cases}$

Soient deux points G et G_1 distants de dx . La déformation de la poutre est caractérisée par le torseur des déformations : $\{\mathcal{D}_G\} = \begin{cases} \overrightarrow{\gamma(G)} = \vec{0} \\ \overrightarrow{\varepsilon(G)} = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{u(G_1)} - \overrightarrow{u(G)}}{dx} = \frac{du}{dx} \vec{x} \end{cases}$.

L'allongement ε_x de la poutre est donné par $u(b) - u(a) = \int_a^b \varepsilon_x dx$

Loi de comportement en traction : $\varepsilon_x = \frac{\sigma_{11}}{E}$

9.1.3 Relation effort-contrainte

On a seulement $N = \iint \sigma_{xx} dS$ donc $\sigma_{11} = \frac{N}{S}$. σ_{11} est une contrainte uniformément répartie sur la surface et normale à celle-ci.

L'allongement vaut : $\Delta \ell = \int \sigma_x d\ell$

9.1.4 Écarts par rapport à la réalité

Dans la vraie vie, il existe un déplacement radial Δ_r .

Des concentrations de contrainte peuvent être mises en évidence par la photoélasticimétrie (atchoum). Ces concentrations de contrainte apparaissent lorsque la section varie brusquement.

9.1.5 Condition de résistance

La poutre peut résister à la rupture si $\sigma < Rpe$ (Rpe est la limite élastique). En traction pure, le tenseur des contraintes s'écrit : $\begin{pmatrix} \frac{N}{S} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

9.2 Torsion pure

9.2.1 Définition

Un solide est soumis à de la torsion pure lorsque le torseur de efforts intérieurs s'écrit :

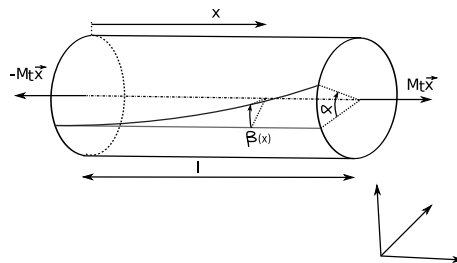
$$\{\mathcal{T}(s)\} = \begin{cases} \overrightarrow{R_{(s)}} = \vec{0} \\ \overrightarrow{M_{(s)}} = M_t(s) \vec{x} \end{cases}$$

Sous de telles sollicitations, toute poutre droite reste une droite et il n'y a pas de répartition de charges.

9.2.2 Déformation

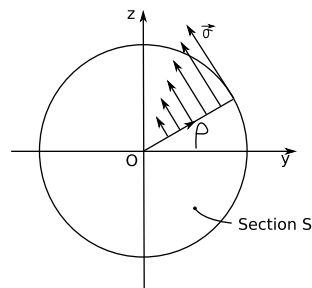
La déformation est donnée par γ : l'angle unitaire de torsion.

$$\gamma = \frac{\beta(x)}{x} = \frac{\alpha}{l} \quad \text{en rad.m}^{-1}$$



9.2.3 Contrainte

Relation contrainte-déformation : $\sigma = G\gamma\rho$



$$\sigma = \frac{M_t \times \rho}{I_O} \quad \text{avec :}$$

- G le module d'élasticité transversale.
- I_O le moment quadratique polaire.

9.3 Flexion pure

9.3.1 Définition

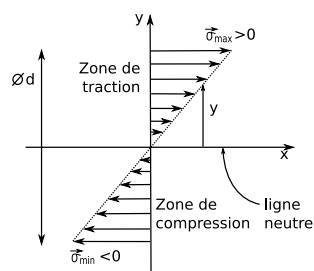
Une poutre est soumise à de la flexion pure si le torseur de cohésion s'écrit :

$$\{\mathcal{T}(s)\} = \begin{cases} \overrightarrow{R_{(s)}} = \overrightarrow{0} \\ M_{(s)} = M_{f_z(s)} \overrightarrow{z} \end{cases}$$

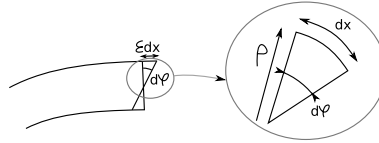
9.3.2 Contrainte

D'après les équations, $M_{f_z} = \iint \sigma dS = k \iint y^2 dS = k I_{Ozz}$ donc $k = \frac{M_{f_z}}{I_{Ozz}}$ d'où :

$$\sigma = \frac{M_{f_z} y}{I_{Ozz}}$$



9.3.3 Déformation



$$dx = \rho d\varphi, \text{ déformation} = \varepsilon$$

$$\text{Loi de comportement : } \varepsilon = \frac{\sigma}{E}.$$

On montre alors que $\frac{1}{\rho} = \frac{M_{fz}}{E I_{Ozz}}$, or pour une poutre droite, $\frac{1}{\rho} = \frac{y''}{1 + y'} \simeq y''$, d'où :

$$y'' = \frac{M_{fz}}{E I_{Ozz}}$$

Par une double intégration, on peut alors déterminer le déplacement relatif de la courbe. y est appelé la flèche.

On remarque que la déformation dépend de E (structure du matériau) et de I_{Ozz} (forme de la poutre).

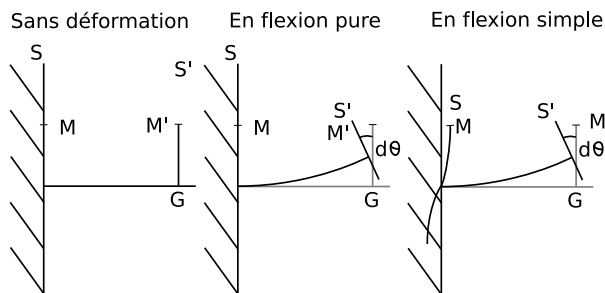
9.4 Flexion simple

9.4.1 Définition

Une poutre est soumise à de la flexion simple si le torseur de cohésion s'écrit :

$$\{\mathcal{T}(s)\} = \begin{cases} \overrightarrow{R_{(s)}} = R \vec{y} \text{ effort tranchant} \\ \overrightarrow{M_{(s)}} = M_{fz}(s) \vec{z} \end{cases}$$

9.4.2 Hypothèses



Avec les efforts tranchants, il apparaît un gauchissement de la courbe. L'hypothèse de Navier-Bernoulli n'est donc plus valable. On lui substitue par conséquent l'hypothèse dite de Navier-Bernoulli généralisée : « 2 sections infiniment voisines deviennent après déformation infiniment voisines, gauches et superposables par déplacement ». Ce principe est basé sur les observations suivantes :

- le gauchissement est toujours très petit devant les dimensions de la surface
- la variation du gauchissement entre 2 sections voisines est négligeable.

On utilisera donc les formules de la flexion pure.